UNIVERSIDAD NACIONAL DE CHILECITO

Escuela de Ciencias Agrarias

Carreras: Ingeniería Agronómica

Ingeniería en Agrimensura

Licenciatura en Enología

Tecnicatura Universitaria en Topografía

Matemática

2019

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CHILECITO

INGRESO 2019

MATEMATICA

- ***¿¿¿En febrero??? ¿Que haremos en el presente curso?***

Se planteará como objetivo primordial recordar algunos aspectos generales que nos serán de suma utilidad..

1° Propiedades de la **potencia y** la **radicación .**

2° Sumas y restas de **polinomios.**

3° Productos y cocientes entre **polinomios.**

4° Casos de **factoreo.**

5° **Ecuaciones**; **pasajes de términos.**

- ***¿Para que servirá el presente curso?***

Será útil para recordar las herramientas mínimas que te servirán de base para resolver los ejercicios de aplicación en matemática I y II de vuestras carreras .

Comenzaremos este curso recordando las operaciones básicas que tendrás que tener presentes .

1° LA POTENCIA ES DISTRIBUTIVA RESPECTO DEL PRODUCTO Y DEL COCIENTE

$(a . b)^n = a^n . b^n$; $(a : b)^n = a^n : b^n$

2° EN UN PRODUCTO DE IGUAL BASE SE SUMAN EXPONENTES.

$x^n . x^m = x^{n+m}$

ANALOGAMENTE EL COCIENTE SE PUEDE EXPRESAR POR LA RESTA DE LOS EXPONENTES

$x^n : x^m = x^{n-m}$

para el caso de división resulta útil entender

$x^2 / x^3 = 1 / x$ considerando que utilizo la simplificación de exponentes.

- 3° EN UNA POTENCIA DE OTRA POTENCIA LOS EXPONENTES SE MULTIPLICAN.

$$(x^m)^n = x^{m \cdot n}$$

- 4° CAVE RECORDAR QUE CUALQUIER RAIZ SE PUEDE EXPRESAR COMO UNA POTENCIA DE LA SIGUIENTE FORMA:

$$\sqrt[5]{x^3} = x^{3/5}$$

DONDE EL INDICE DE LA RAIZ PASA A SER EL DENOMINADOR DEL EXPONENTE

- 5° LA RADICACION ES DISTRIBUTIVA RESPECTO DEL PRODUCTO O DEL COCIENTE, NO ASI RESPECTO DE LA SUMA O LA RESTA.

$$\sqrt[n]{x \cdot b} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{b} \quad ; \quad \sqrt[n]{x : b} = \sqrt[n]{x} : \sqrt[n]{b}$$

RECORDAR QUE AL IGUAL QUE LA POTENCIA LA RADICACION ES SOLO DISTRIBUTIVA RESPECTO DEL PRODUCTO Y DEL COCIENTE …. NO ES DISTRIBUTIVA RESPECTO DE LA SUMA O LA RESTA

$$\sqrt[n]{x \pm b} \neq \sqrt[n]{x} \pm \sqrt[n]{b}$$

- 6° LA RAIZ DE OTRA RAIZ ES IGUAL A OTRA RAIZ QUE TIENE EL MISMO RADICANDO Y COMO INDICE LOS PRODUCTOS DE LOS INDICES DADOS .

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[n.m]{x}$$

- 7° VAMOS A MENCIONAR LA REGLA DE LOS SIGNOS PARA POTENCIA

$(+x)^{n} = +$ *toda potencia de base + es positiva*

$(-x)^{par} = +$ *toda potencia de base - y exponente par es positiva*

$(-x)^{impar} = -$ *toda potencia de base - y exponente impar es negativa*

$x^{-b} = (1/x)^{b}$ *todo exponente negativo invierte la base y deja el exponente en positivo*

- 8° AHORA EL TURNO DE LA RADICACION

$\sqrt[n]{(+x)} = +$ *la raíz de radicando positiva es positiva*

$\sqrt[par]{(-x)}$ = **NO EXISTE DENTRO DEL CAMPO REAL**

$\sqrt[impar]{(-x)} = -$ *la raíz de radicando negativo e índice impar es negativa*

EXPRESIONES ALGEBRAICAS - que es una expresión algebraica?

Es toda combinación de numero y letras – llamadas variables- vinculadas entre si por un numero finito de operaciones – así podemos decir que

$3x - \frac{1}{2} y^3 - z$ es una expresión algebraica o polinomio como solemos llamarlo.

Introduciremos aquí dos definiciones :

- parte literal: es la que corresponde a las variables y sus exponentes.
- coeficiente : es el numero que antecede a la parte literal

Ahora para que un monomio – términos que componen el polinomio - se pueda sumar a otro, deben las partes literales ser iguales, procediéndose entonces a sumar los coeficientes .

$\mathbf{4x^2} + 5y \mathbf{- 2x} - \mathbf{5x^2} \mathbf{+ 3x} = \mathbf{- 1x^2} + 5y \mathbf{+ 1x}$

Ahora resolveremos algunos problemas desafiantes…

a-

(**11** **b** $\mathbf{x^5}$ - 2 b x^4 + 3 b^2 x)+(**2** **b** $\mathbf{x^5}$ - 2 b^2 x - 4 b^2 x) + (**13** **b** $\mathbf{x^5}$ - 6 b x^4 + b^2 x) =

Las partes literales deben ser iguales….. **b** $\mathbf{x^5}$ se puede sumar solo si existe un termino semejante ; es decir algún termino que contenga exactamente **b** $\mathbf{x^5}$, Así operaremos los coeficientes de dichos términos **11 + 2 + 13**

b-

$(5\, a\, x - 3\, b\, y + 4/3\, a\, x^2\ ) + (\, a\, x + 1/3\, b\, y + 2/3\, a\, x^2\,) =$

Aquí debes primero reconocer quien se suma a quien . Identifícalos por las partes literales iguales y luego opera los coeficientes .

c-

$(-\, 3\, h^3\, x + a\, x^2\ -\, 12\, x^3 + x^5\,) - (\, -\, 4\, a\, x^2 - 2\, h^3\, x\ + x^5 + x^3\,) =$

Recuerda .. Primero quien sumo con quien ? Luego opero los coeficientes

IMPORTANTE : la suma de polinomios es una de las herramientas que mas usaremos en el cursado de matemática , no debes dejar de tenerla presente .

Productos y cocientes entre polinomios ………….

- *Nos concentraremos en el producto en primera etapa y luego el cociente entre polinomios.*

- *El resultado del producto entre polinomios es un nuevo polinomio cuyo coeficiente es el producto de los coeficientes intervinientes y cuya parte literal es el producto de las partes literales involucradas.*

- *Notar que no se menciona semejanza entre monomios para realizar la operación. Si se debe tener presente la propiedad distributiva a la multiplicación con respecto a la adición **.***

- ***SE MULTIPLICA CADA TERMINO DEL PRIMER POLINOMIO POR CADA TERMINO EN EL SEGUNDO POLINOMIO***

$$(3x^3 - 5x^2 - 4x - 2) . (2x) = 6x^4 - 10x^3 - 8x^2 - 4x$$

Veremos que es lo que se dijo debíamos hacer para resolver un producto entre polinomios .

a . $(- 3 a^3 + 2 a^2 b c^2 + a b) \ . \ (2 a^2 y x) \ =$

b. $(3/2\, x^2 \ - \ x \ + \ 2/3) . (3 x^2 + 2 x \ + 4/3) \ =$

Hemos marcado los términos y hemos identificado con líneas como se debe aplicar la distributiva ; es decir quien voy a multiplicar con quien.

RECUERDA SIEMPRE : APLICAR PROPIEDAD DISTRIBUTIVA RESPECTO DE CADA TERMINOS; ES DECIR CADA TERMINO DEL PRIMER POLINOMIO POR CADA UNO DE LOS TERMINOS DEL SEGUNDO POLINOMIO.

Trabajaremos ahora con otra operación que es para tener muy presente , la división entre polinomios.

- $4\ a\ b^2 : 3\ a\ b^2$

Aquí el cociente lo podemos interpretar fácilmente si reescribimos la expresión anterior como :

$$\frac{4\ \cancel{a}\ b^2}{3\ \cancel{a}\ b^2}$$

Recordemos que podíamos trabajarlos como simplificaciones resultando este cociente en 4/3

Analicemos ahora una división entre polinomios de forma general .

$(3\ x^3 - 5\ x^2 - 4\ x + 2) : (x - 3)$

Primeramente deberé reescribir el polinomio ordenado y completo , tanto el dividendo (a quien dividiré) y al divisor (por quien dividiré)

$$\begin{array}{l|l} 3\ x^3 - 5\ x^2 - 4\ x + 2 & x - 3 \\ \hline \underline{-(3\ x^3 - 9\ x^2)} \downarrow & 3\ x^2 \ldots\ldots \\ \quad 0\ x^3 + 4\ x^2 - 4\ x & \end{array}$$

*tomo el termino **3 x³** y lo divido por **x** resultando 3 **x²***
multiplicamos ***3 x²*** por -3 y luego por x, restamos y bajamos otro termino continuando con la operatoria.

Notemos que es la misma mecánica de las divisiones que estamos acostumbrados a trabajar . Cuando ya no tengo mas términos para continuar bajando lo que queda sin poder dividir es el resto. Así es como habremos hallado el cociente.

Centraremos nuestro estudio ahora en el cociente entre polinomios y dentro de estos prestaremos especial atención a un caso en particular ………. La división cuando nuestro divisor tiene la forma (x – a)

Por ejemplo $(3x^3 - 5x^2 - 4x + 2) : (x - 3)$

Para resolver este caso haremos uso de la regla de RUFFINI para lo cual necesitamos reconocer el mayor exponente en el dividendo (para este ejemplo x^3) y de allí plantearemos ordenadamente en forma decreciente hasta llegar al termino independiente … para nosotros será

		x^3	x^2	x	i
Debajo plantear sus coeficientes		+3	-5	-4	+2
Escribir a (-3) cambiado de si	+3		+9	+12	+24
		---------	---------	---------	---------
Bajar el 1° coeficiente y operar	por	+3	+4	+8	+26

De donde resulta ($+3x^2 + 4x + 8$) el cociente y + 26 el resto

- Resolveremos algunas divisiones en las que podremos aplicar RUFFINI-

- a - $(4 x^3 + 5 x^2 – x + 12) : (x – 2)$

Completo y ordenado , divisor de la forma de Ruffini

- b - $(x^4 – 1) : (x -1)$

Incompleto por lo que tendremos que completarlo, divisor de la forma de Ruffini

- c - $(x^3 - 27) : (3 – x)$

Incompleto, ver como reescribir el divisor para llevarlo a la forma de Ruffini

- d - $(120 – 51 x^2 + x^5 -23 x^3 + 3 x^4 - 94 x) : (x +5)$

desordenado, divisor de la forma de Ruffini

Además de los temas ya vistos en el presente curso necesitaremos los recordar los casos de **factoreo** que describiremos a continuación.

- **FACTOR COMUN .**

Si separamos el polinomio en términos, el factor común es aquel factor que se repite (es común) a varios términos …veamos el siguiente ejemplo.

$3a - 3b + ax - bx =$

Observamos primero que hay muchos factores comunes entre los términos. Por ejemplo tenemos **3** factor común al 1° y al 2° termino; **a** es común al 1° y al 3° ; **x** al 3° y al 4° o **b** al 2° y al 4°.

Por lo tanto podremos extraer del 1° y el 2° termino a **3** resultando:

$3(a - b)$

del 3° y del 4° termino podríamos extraer **x** quedándonos:

$x(a - b)$

Reescribiendo la expresión como

$3(a - b) + x(a - b)$

y si nos detenemos nuevamente encontramos que ha resultado **$(a - b)$** factor común al nuevo 1° y 2° termino pudiendo extraer nuevamente el término común.

$(a - b) \cdot (3 + x)$

Que es lo que sucedería si ahora pensamos en operar inversamente, es decir a **(a – b) . (3 + x)**, lo trabajamos como un producto. Aquí como deberemos recordar plantearemos propiedad distributiva respecto de la suma.

Resultando :

a.3 + a.x – b.3 – b.x

El cual reordenado queda

3 a – 3 b + a x + b x

Que no es mas que la ecuación de partida .

Es de notar que el factor común no es mas que otra cosa que el mecanismo inverso a realizar la productoria entre polinomios.

Animémonos a extraer factor común y a posterior recuperemos el polinomio de partida aplicando el producto

$- 6/7\ d^2\ h^3\ - 6\ b\ h^2\ =$

- **TRINOMIO CUADRADO PERFEC TO**

Siempre que tengamos un polinomio de la forma $(a + b)^2$; este se puede desarrollar el trinomio que llamaremos cuadrado perfecto y tiene la forma ……..

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2 a b + b^2$$

Notar que esta expresión deberá quedarles grabada a fuego ………. El cuadrado del primero mas el doble producto del primero por el segundo mas el cuadrado del segundo.

Y también esta desarrollada la situación en el caso de tener (a – b) la cual cambia los signos a los marcados en rojo.

Plantearemos algunos ejemplos para resolver juntos; siendo lo mas importante aquí reconocer a quien le llamaremos a y a quien b.

$$(3x - 5)^2 = (3x)^{\mathbf{2}} - \mathbf{2} (3x) 5 + 5^{\mathbf{2}}$$

$$(\tfrac{1}{2} x + b^3)^2 = ?$$

Habiendo resuelto mecánicamente el ejercicio anterior …. Has pensado en otra forma de llegar al mismo resultado …? Te desafío a que a partir de

$(\frac{1}{2} x + b^3)^2 =$

intentes llegar al resultado anterior pero por otro camino. Como ayuda puedo decirte que este polinomio elevado al cuadrado no es mas que

$(\frac{1}{2} x + b^3) . (\frac{1}{2} x + b^3) =$

Y si te planteásemos

$(b^2 - 1/3 x)^3$

Estas pensando en

$(b^2 - 1/3 x) . (b^2 - 1/3 x) . (b^2 - 1/3 x)$

SI !!!!! Y a que resultado arribas ?

Ahora tal vez te sorprenda que hay una forma rápida de resolverlo … pero solo con la ayuda de tu memoria .

- **CUATRINOMIO CUBO PERFECTO**

Siempre que tengamos un polinomio de la forma $(a + b)^3$; se puede desarrollar el cuatrinomio que llamaremos cubo perfecto y tiene la forma ……..

$(a \underline{\pm} b)^3 = a^3 \underline{\pm} 3a^2 b + 3ab^2 \underline{\pm} b^3$

Esta demás recordar que este es otro desarrollo que deberán memorizarse …………….

El cubo del primero mas el triplo del primero al cuadrado por el segundo mas el triplo de primero por el segundo al cuadrado mas el cubo del segundo .

También esta desarrollada la situación en el caso de tener (a – b) la cual cambia los signos a los marcados en rojo.

Seguro que ya tienes la idea; que para resolver los ejercicios dados a continuación deberás identificar nuevamente a quien llamaremos a y a quien b….

$(b^2 - 1/3\,x)^3 = (b^2)^{\mathbf{3}} \mathbf{- 3}(b^2)^{\mathbf{2}}\, 1/3\,x \mathbf{+ 3}(b^2)(1/3\,x)^{\mathbf{2}} \mathbf{-} (1/3\,x)^{\mathbf{3}}$

$(\sqrt[2]{x} + b)^3 = ?$

- **DIFERENCIA DE CUADRADOS**

Toda diferencia de cuadrados se puede expresar como el producto ….. de la suma …. por …..la resta….. de las bases de dichos cuadrados.

$$\mathbf{a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)}$$

Deberás recordarla ya que nos será de muchísima utilidad; y como para reforzarla resolveremos algunos ejercicios.

Además seria conveniente que pienses en realizar el camino inverso, es decir partiendo del resultado expresado como producto entre (a + b) y (a – b) aplica distributiva y verifica que el resultado es el punto de partida.

Por otro lado nota siempre que es la diferencia de cuadrados …. Es la resta la que puedo expresar de esta forma

$$b^4 - x^2 = (b^2)^2 - x^2 = (b^2 + x) \cdot (b^2 - x)$$

- Una **ECUACIÓN** es una igualdad que contiene una incógnita; por ej. **$2x + 5 = 35$**

Para resolver una ecuación es preciso:

distinguir claramente cuales son los distintos términos

- ➢ aquellos que están agrupados por llaves , paréntesis o corchetes.

$3.(2.x – 1) – [4.x – (x – 3)]= 2.x – (x + 1)$

Aplicamos propiedad distributiva

$6.x – 3 – (4.x – x + 3) = 2.x – x – 1$

Notemos que cuando un termino esta precedido por signo negativo cambia de signos al eliminar el paréntesis, corchete o llave

$6.X – 3 – 4.x + x – 3 = x – 1$

$3.X – 6 = x – 1$

Agrupamos los términos que contienen variables semejantes por un lado y los términos independientes por otro.

$3.x – x = – 1 + 6$

Tengamos presentes que las operaciones cambian al pasar al otro lado de la igualdad. No cuando los cambiamos de lugar.

$2. x = 5$

Por ultimo despejamos la variable incógnita .

$x = 5 / 2$

Ahora resolveremos el siguiente problema

$[\ x - ¼ : 2 - (\ 3.\ x + 2\ )]^3 = 0$ al separar en términos identifico prioridad en operaciones

$(\ x - 1/8 - 3.\ x - 2\ )^3 = 0$ paso el cubo como raíz cubica al otro miembro

$x - 1/8 - 3.\ x - 2 = 0$ resuelvo los términos semejantes

$-2.\ x - 17/8 = 0$ paso el termino - como + al otro miembro

$-17/8 = 2.x$ por ultimo el 2 que esta multiplicando pasa dividiendo

$X = -17/16$

- Casos en los que se reconozcan como mayor exponente x^2

$(x + 2\ )^2 + 5.x = 2.x - 2.$ Desarrollamos el cuadrado según visto en casos de factoreo

$x^2 + 2\ .x.2 + 2^2 + 5.x = 2.x - 2$ Agrupamos monomios semejantes

$x^2 + 4.x + 4 + 5.x - 2.x + 2 = 0$

$x^2 + 7.x + 6 = 0$ Donde llamaremos 1 = a 7 = b y 6 = c

Así expresada esta ecuación puede resolverse aplicando la siguiente fórmula

$$X_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{(b)^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}$$